

Московский государственный технический университет имени Н.Э.Баумана

Л. К. МАРТИНСОН, Е. В. СМИРНОВ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ДОМАШНЕМУ
ЗАДАНИЮ ПО КУРСУ ОБЩЕЙ ФИЗИКИ
РАЗДЕЛ
«ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ»

Под редакцией Л. К. МАРТИНСОНА

Издательство МГТУ им. Н.Э.Баумана
1999

УДК 530.146
ББК 22.314
М29

Рецензент В. В. САВИЧЕВ

М29

Л. К. МАТИНСОН, Е. В. СМЕРНОВ Методические указания к домашнему заданию по курсу общей физики: Раздел «Элементы квантовой механики» / Под ред. Л.К. МАТИНСОНА. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. БАУМАНА. 1999, 35 с., ил.

ISBN 5-7038-1379-4

Даны основные законы и соотношения теории и изложена методика решения типовых задач. Приведены условия задач домашнего задания. Для студентов 2 курса всех специальностей.

Ил. 8. Библиогр. 5 назв.

УДК 530.145
ББК 22.314

ISBN 5-7038-1379-4 © МГТУ им. Н. Э. БАУМАНА, 1999.

Электронная версия документа подготовлена с помощью издательской системы \LaTeX 2_ε.

PDF версия получена с помощью программы pdf \TeX версии 0.14-f.

Перечисленные программные продукты являются свободными и распространяются бесплатно. Они входят в состав проекта \TeX . Официальный сайт проекта <http://miktex.org>

Гарнитура Антиква. Для подготовки документа использованы кириллические PostScript шрифты (Type I), входящие в состав пакета PSCyr 0.4

1 Волновые свойства частиц.

Гипотеза де Бройля

В 1924 г. Луи де Бройль выдвинул гипотезу о том, что все частицы обладают волновыми свойствами. В частности, волновые свойства свободной частицы, движущейся с постоянной скоростью в направлении оси x , описываются плоской волной де Бройля, распространяющейся в том же направлении. Частота этой волны ω и её длина λ_B связаны с энергией E частицы и её импульсом p соотношениями

$$\omega = \frac{E}{\hbar}, \quad \lambda_B = \frac{2\pi\hbar}{p} \quad (1.1)$$

Здесь $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.05 \cdot 10^{-34}$ Дж·с — рационализированная постоянная Планка.

В комплексной форме уравнение плоской волны де Бройля для частицы может быть записано в виде

$$\Psi(x, t) = Ae^{-i(\omega t - kx)} = Ae^{-\frac{i}{\hbar}(Et - px)}. \quad (1.2)$$

Здесь A — амплитуда волны; $k = \frac{2\pi}{\lambda_B} = \frac{p}{\hbar}$ — волновое число; $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица. Начальная фаза волны в (1.2) выбрана равной нулю.

Волны де Бройля можно назвать волнами материи. По физическому смыслу этих волн вероятность обнаружения частицы в некоторой области пространства тем больше, чем больше квадрат амплитуды волны де Бройля, т.е. чем больше её интенсивность.

Волны де Бройля могут отражаться, преломляться, интерферировать друг с другом, испытывать дифракцию при взаимодействии с неоднородностями. В этом смысле, например, можно говорить о дифракции частиц и наблюдать дифракционные эффекты в экспериментах с движущимися частицами.

Один из первых опытов по наблюдению дифракции электронов на кристалле (рис. 1.1, где 1 — электронная пушка; 2 — детектор отражённых электронов) был выполнен в 1927 г. К. Дэвиссоном и Л. Джермером; в нём разогнанные в электронной пушке электроны падали на кристалл никеля под некоторым углом скольжения θ . Как показал опыт, резкое увеличение числа отражённых от кристалла и попадающих в детектор электронов наблюдалось в тех случаях, когда выполнялось условие

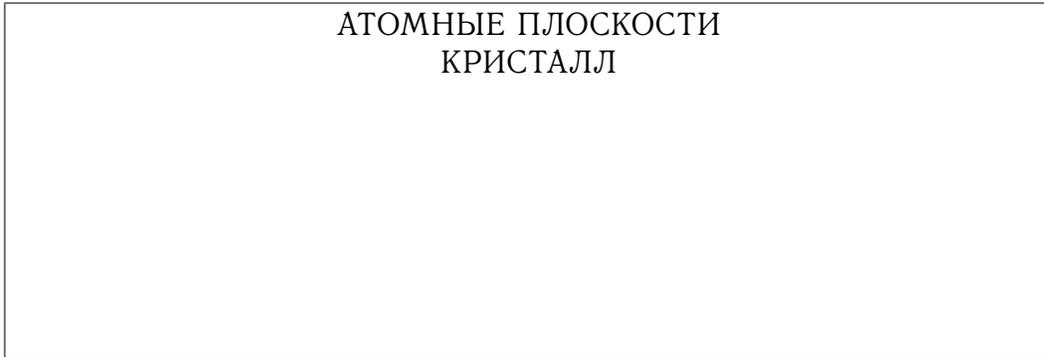


Рис. 1. 1.1

Вульфа-Брегга

$$2d \sin \theta = n\lambda_B, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.3)$$

соответствующее условию усиления вторичных электронных волн, отражённых от различных атомных слоев плоскостей. В формуле (??) d — расстояние между атомными плоскостями, проходящими через узлы кристаллической решётки, а целое число n — порядок максимума отражения.

В представленной схеме опыта основная система атомных плоскостей, для которых атомы кристалла расположены наиболее густо, была параллельна отшлифованной поверхности кристалла. В общем случае, однако, атомные плоскости могут располагаться под некоторым углом к поверхности кристалла. Тогда в формуле (??) угол θ следует рассматривать как угол скольжения пучка падающих электронов по отношению к системе атомных плоскостей, отражающих волны де Бройля.

1.1 Примеры решения задач

☞ **Задача .1.1.** Получить выражение для длины волны де Бройля релятивистской частицы, обладающей кинетической энергией E_K . При каких значениях E_K ошибка в определении длины волны де Бройля по нерелятивистской формуле не превышает одного процента: а) для электрона, б) для протона?

Решение. Связь между импульсом нерелятивистской частицы p и её кинетической энергией E_K имеет вид: $p^2 = 2m_0E_K$. Для релятивистской

частицы, движущейся со скоростью, сравнимой со скоростью света в вакууме c , эта связь выражается формулой $p^2c^2 = E_K(E_K + 2m_0c^2)$. Тогда в соответствии с формулой (??) находим длину волны де Бройля.

Для нерелятивистской частицы

$$\lambda_B = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m_0E_K}} \quad (1.4)$$

Для релятивистской частицы

$$\lambda_B^{(p)} = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m_0E_K}} \sqrt{\left(1 + \frac{E_K}{2m_0c^2}\right)} \quad (1.5)$$

Относительная ошибка расчётов по этим формулам

$$\varepsilon = \frac{\lambda_B - \lambda_B^{(p)}}{\lambda_B} = 1 - \sqrt{\left(1 + \frac{E_K}{2m_0c^2}\right)} \quad (1.6)$$

Отсюда находим значение кинетической энергии частицы, для которого расчёт по нерелятивистской формуле приводит к относительной ошибке ε ,

$$E_K(\varepsilon) = 2m_0c^2 \left[\frac{1}{(1 - \varepsilon)^2} - 1 \right]. \quad (1.7)$$

Для малых $\varepsilon \ll 1$ получаем $E_K(\varepsilon) \approx 4\varepsilon m_0c^2 = 4\varepsilon E_0$, где $E_0 = m_0c^2$ — энергия покоя частицы. В частности, для электрона $E_0 = 0.511$ МэВ, а для протона $E_0 = 938.2$ МэВ. Поэтому вплоть до значений кинетической энергии $E_K = 20.4$ кэВ для электрона и $E_K = 37.5$ МэВ для протона при расчёте длины волны де Бройля по нерелятивистской формуле относительная ошибка расчёта не превышает одного процента.

☞ **Задача 1.2** Какую ускоряющую разность потенциалов U должен пройти электрон, чтобы длина волны де Бройля стала равной 10^{-10} м?

☞ **Решение.** Электрон, прошедший ускоряющую разность потенциалов U , приобретает кинетическую энергию $E_K = eU$. Используя нерелятивистскую формулу для длины волны де Бройля

$$\lambda_B = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m_0E_K}} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m_0eU}}, \quad (1.8)$$

возможность применения которой можно обосновать расчётом, получим

$$U = \frac{2\pi^2\hbar^2}{m_0e\lambda_B^2}. \quad (1.9)$$

Подставляя числовые значения, находим $U = 150$ В.

Так как значение кинетической энергии электрона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов 150 В, составляет 150 эВ, то на основании оценок, полученных в задаче (1.1), можно сделать вывод о правомерности использования нерелятивистской формулы для длины волны де Бройля в этой задаче.

☞ **Задача 1.3.** Электрон с кинетической энергией $E_K = 100$ эВ из вакуума попадает в металл, внутренний потенциал которого $U_i = 10$ В. Найдите показатель преломления металла n_e для электронной волны де Бройля.

☞ **Решение . .** При попадании электрона в металл его потенциальная энергия уменьшается на величину, равную eU_i . Поэтому из закона сохранения энергии следует, что в металле кинетическая энергия электрона увеличится и станет равной $E_K^{(1)} = E_K + eU_i$.

Длина волны де Бройля нерелятивистского электрона в вакууме (см. задачу 1.1) определяется соотношением

$$\lambda_B = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m_0E_K}}. \quad (1.10)$$

При попадании электрона в металл длина волны де Бройля уменьшается и становится равной

$$\lambda_B^{(1)} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m_0E_K^{(1)}}} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m_0E_K + eU_i}}. \quad (1.11)$$

Теперь, используя аналогию из волновой оптики, определим показатель преломления металла для электронной волны де Бройля через отношение длин волн

$$n_e = \frac{\lambda_B}{\lambda_B^{(1)}} = \sqrt{1 + \frac{eU_i}{E_K}}. \quad (1.12)$$

Для данных из условия задачи находим, что $n_e = 1.05$.

☞ **Задача 1.4.** Пучок нерелятивистских электронов падает под углом скольжения $\theta = 30^\circ$ на грань монокристалла с расстоянием между атомными плоскостями $d = 2.4 \cdot 10^{-10}$ м. Определите значение первой ускоряющей разности потенциалов U_1 , при которой наблюдается интенсивное отражение электронов от кристалла.

☞ **Решение .** Считая, что система атомных плоскостей, от которых отражаются электронные волны де Бройля, параллельна поверхности

монокристалла, запишем условие (??) максимума отражения электронов от кристалла для n -го порядка отражения

$$2d \sin \theta = n\lambda_B. \quad (1.13)$$

Для длины волны де Бройля электронов, ускоренных разностью потенциалов U , можно записать выражение (см. решение задачи 1.2)

$$\lambda_B = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m_0eU}}. \quad (1.14)$$

Поэтому в случае интенсивного отражения электронов от кристалла n -го порядка они ускоряются разностью потенциалов

$$U_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2d^2m_0e \sin^2 \theta}. \quad (1.15)$$

Отсюда минимальное значение ускоряющей разности потенциалов соответствует $n = 1$ и составляет $U_1 = 26 \text{ В}$ для данных из условия задачи.

☞ **Задача 1.5.** Пучок нерелятивистских электронов, прошедших ускоряющую разность потенциалов $U = 180 \text{ В}$, падает на монокристалл под углом $\alpha = 75^\circ$ к его поверхности. В направлении, составляющем угол $\beta = 55^\circ$ с поверхностью кристалла, наблюдается максимум отражения электронов четвёртого порядка. Найдите расстояние между отражающими атомными плоскостями кристалла при условии, что падающий и отражённый пучки лежат в одной плоскости, перпендикулярной к поверхности кристалла.

☞ **Решение.** Длину волны де Бройля для электронов, прошедших ускоряющую разность потенциалов U , определим по формуле

$$\lambda_B = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m_0eU}}, \quad (1.16)$$

полученной при решении задачи 1.2. В рассматриваемом случае, когда $\alpha \neq \beta$, система отражающих атомных плоскостей не параллельна поверхности кристалла (рис. 2, где 1 — падающий электронный пучок; 2 — отражённый электронный пучок; 3 — отражающая плоскость кристалла). С учётом зеркального отражения волн от атомных плоскостей находим, что атомные плоскости должны быть перпендикулярны биссектрисе, делящей пополам угол γ между падающим и отражённым электронными

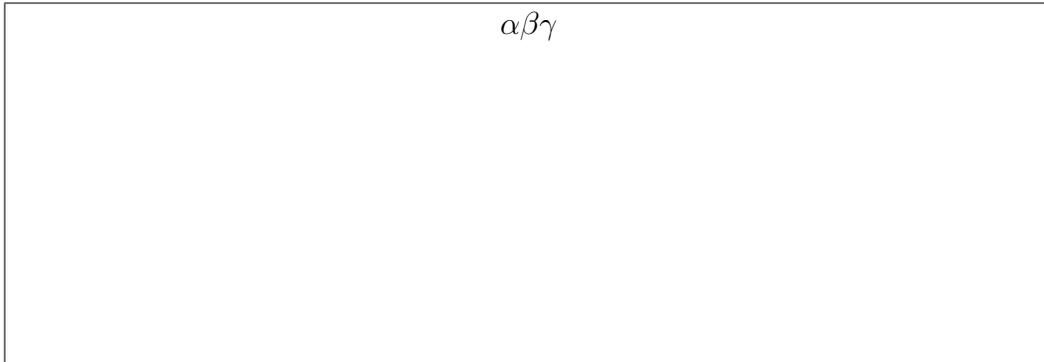


Рис. 2. 1.2

пучками. Из рис. 2 видно, что угол между падающим электронным пучком и системой отражающих атомных плоскостей

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2}. \quad (1.17)$$

Поэтому если отражение от этой системы атомных плоскостей соответствует дифракционному максимуму n -го порядка, то выполняется условие (??) Вульфа-Брэгга $2d \sin \theta = n\lambda_B$, которое можно записать в виде

$$2d \sin \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{n \cdot 2\pi\hbar}{\sqrt{2m_0 eU}}. \quad (1.18)$$

Отсюда находим искомое межплоскостное расстояние

$$d = \frac{n\pi\hbar}{\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sqrt{2m_0 eU}}. \quad (1.19)$$

Выполняя расчёт по этой формуле, получаем $d = 2,1 \cdot 10^{-10}$ м.

2 Соотношения неопределенностей Гейзенберга

В 1927 г. В. ГЕЙЗЕНБЕРГ установил, что при наличии у частиц волновых свойств существует связь между неопределенностями координат и соот-

ветствующими неопределенностями компонент импульса частицы. Эта связь имеет вид неравенств¹:

$$\begin{aligned}\Delta x \cdot \Delta p_x &\geq \hbar, \\ \Delta y \cdot \Delta p_y &\geq \hbar, \\ \Delta z \cdot \Delta p_z &\geq \hbar.\end{aligned}\tag{2.20}$$

Эти соотношения играют важную роль, позволяя очертить границы применимости классической механики, в которой, в отличие от квантовой механики, пренебрегают волновыми свойствами частиц.

Из соотношений Гейзенберга (??) следует, что из-за наличия у частицы волновых свойств нельзя одновременно точно измерить координату частицы, например x , и соответствующую проекцию импульса Δp_x . Действительно, при одновременном точном измерении этих величин $\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta p_x \rightarrow 0$. Но это противоречит неравенствам (??). Отсюда следует, в частности, что в квантовой механике для описания движения частицы нельзя использовать представление о движении частицы по определённой траектории, так как такое движение предполагает возможность одновременного точного определения и координат, и импульса (скорости) частицы.

Аналогичные соотношения неопределённостей в квантовой механике записываются и для других пар физических величин. Так, например, энергия системы, существующей в течение промежутка времени Δt , имеет неопределённость ΔE , причём

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar\tag{2.21}$$

Ограничения на информацию о движении частицы и её состоянии, вытекающие из соотношений неопределённостей, оказываются несущественными для лабораторных макроскопических масштабов. Однако эти ограничения становятся существенными для малых масштабов расстояний, импульсов, энергий и времён жизни частиц, с которыми мы сталкиваемся в атомной и ядерной физике и в физике элементарных частиц.

2.1 Примеры решения задач

☞ **Задача .2.1.** Определите с помощью соотношений неопределённостей

¹Иногда в правой части неравенств (2.20) записывают не \hbar , а $\frac{1}{2}\hbar$ или $2\pi\hbar$. В силу того, что эти соотношения используются как оценочные, принципиального различия между такими формами записи нет.

стей минимальную кинетическую энергию электрона, движущегося в области, размер которой $L = 10^{-10}$ м соответствует характерному размеру атомов.

☞ **Решение.** Для оценочных расчётов будем считать движение частицы одномерным и величину неопределённости координаты положим равной размеру области движения частицы, т.е. $\Delta x = L$. При оценке неопределённости импульса примем, что физически разумная неопределённость импульса не должна превышать значения самого импульса, т.е. положим $\Delta p_x = p$. Тогда из соотношения неопределённостей $\Delta x \cdot \Delta p_x = \hbar$ получим, что при движении электрона в рассматриваемой области пространства $Lp \geq \hbar$, т.е. импульс частицы не может быть меньше чем

$$p_{min} = \frac{\hbar}{L} \quad (2.22)$$

Это означает, в частности, что в квантовой механике частица не может иметь нулевой импульс, т.е. не может находиться в состоянии покоя.

Используя связь между импульсом p и кинетической энергией E_K для нерелятивистской частицы в виде $p = \sqrt{2m_0 E_K}$ запишем теперь следующее оценочное соотношение значения кинетической энергии частицы:

$$E_K^{min} = \frac{\hbar^2}{2m_0 L^2}. \quad (2.23)$$

Подставляя в эту формулу массу электрона $m_0 = 9.1 \cdot 10^{-31}$ кг и размер области движения $L = 10^{-10}$ м, находим $E_K^{min} = 6 \cdot 10^{-19}$ Дж = 3.9 эВ. Чтобы электрон с такой кинетической энергией удержать в области движения, необходима энергия связи такого же порядка. Этот вывод согласуется с опытными данными для энергий связи электронов в атомах.

☞ **Задача .2.2.** Используя соотношения неопределённостей, покажите, что в ядре атома не могут находиться электроны. Считать, что линейный размер ядра составляет $L = 5 \cdot 10^{-15}$ м.

☞ **Решение.** Как и в задаче 2.1, на основании соотношения неопределённостей можно оценить минимальное значение импульса электрона

$$p_{min} = \frac{\hbar}{L} \quad (2.24)$$

Для рассматриваемого размера ядра $L = 5 \cdot 10^{-15}$ м минимальный импульс соответствует релятивистской скорости электрона. Поэтому, используя

релятивистскую формулу связи импульса p с кинетической энергией E_K частицы

$$pc = \sqrt{E_K^2 + 2E_K E_0},$$

получаем квадратное уравнение для расчёта минимальной кинетической энергии электрона в ядре

$$(E_K^{min})^2 + 2E_0 E_K^{min} - \left(\frac{\hbar c}{L}\right)^2 = 0$$

Положительный корень этого уравнения

$$E_K^{min} = \sqrt{E_0^2 + \left(\frac{\hbar c}{L}\right)^2} - E_0$$

определяет искомое значение кинетической энергии электрона, движущегося в ядре. Учитывая, что энергия покоя электрона $E_0 = m_0 c^2 = 8,19 \cdot 10^{-14}$ Дж = 0,51 МэВ, находим окончательно значение $E_K^{min} = 6,2 \cdot 10^{-22}$ Дж = 38,7 МэВ.

Как показывают экспериментальные данные, энергия связи частиц в ядре не превышает 10 МэВ. Следовательно, силы, действующие в ядре, не смогут удержать в нём электрон с кинетической энергией, равной 38,7 МэВ. Поэтому электрон не может быть составной частицей ядра атома.

☞ **Задача. 2.3.** Используя соотношения неопределённостей Гейзенберга, получите оценочное соотношение, определяющее границы применимости классической механики для описания движения частицы в некоторой области пространства с характерным линейным размером L .

☞ **Решение.** Очевидно, что понятие траектории можно использовать для описания механического движения частицы только в том случае, если неопределённость её координаты мала по сравнению с характерным размером области движения, т.е. $\Delta x \ll L$.

Из соотношений неопределённостей, полагая $\Delta p_x = p$, получаем для неопределённости координаты значение

$$\Delta x = \frac{\hbar}{\Delta p_x} = \frac{\hbar}{p} = \frac{\lambda_B}{2\pi},$$

где λ_B — длина волны де Бройля для рассматриваемой частицы.

Следовательно, условие, при выполнении которого для описания движения частицы можно использовать законы классической механики, пренебрегая квантовыми эффектами, можно записать в виде

$$\lambda_B \ll L .$$

Отметим, что в это условие входит размер области движения частицы, который обычно задаётся условием решаемой задачи. Анализ показывает, что полученное условие нарушается для частиц с малой массой, т.е. микрочастиц, движущихся в областях пространства порядка атомных размеров.

☞ **Задача .2.4.** Среднее время жизни атома в возбужденном состоянии составляет $\tau = 10^{-8}$ с. Оцените минимальное значение неопределённости частоты излучения атома.

☞ **Решение .** Частота излучения, соответствующая переходу атома из возбуждённого состояния с энергией E_2 в основное состояние с энергией E_1 , определяется из соотношения

$$\hbar\omega = E_1 - E_2 .$$

Из соотношения неопределённости (??) следует, что неопределённости энергий ΔE_1 и ΔE_2 зависят от времени жизни атома в основном и возбуждённом состояниях, причём

$$\Delta E_1 = \frac{\hbar}{\Delta t_1} , \quad \Delta E_2 = \frac{\hbar}{\Delta t_2} .$$

Так как в основном состоянии атом может находиться неограниченно долго, то следует полагать, что $\Delta t_1 \rightarrow \infty$. Время жизни атома в возбуждённом состоянии $\Delta t_2 = \tau$ по условию задачи. Поэтому $E_1 = 0$, а $E_2 = \hbar/\tau$.

Тогда для оценки неопределённости частоты излучения атома получаем соотношение

$$\hbar\Delta\omega = \Delta E_2 = \frac{\hbar}{\tau} ,$$

из которого следует, что $\Delta\omega = \frac{1}{\tau} = 10^8$ Гц.

Именно это значение определяет минимальную ширину спектральных линий излучения атомов. Реальная ширина спектральных линий увеличивается за счёт теплового движения излучающих атомов и других факторов.

3 Задачи о стационарных состояниях в квантовой механике

Если потенциальная энергия частицы $U(x, y, z)$ в некотором силовом поле явно не зависит от времени, то полная энергия частицы E со временем не изменяется, и соответствующую задачу квантовой механики называют стационарной задачей, или задачей о стационарных состояниях. Решение общего временного уравнения Шрёдингера в стационарной задаче может быть записано в виде

$$\Psi(x, y, z, t) = \Psi(x, y, z)e^{-\frac{i}{\hbar}Et}. \quad (3.25)$$

Поскольку временной множитель в (3.25) известен, то основное внимание мы будем уделять координатной части $\Psi(x, y, z)$, которую и называют волновой функцией стационарной задачи. Такая волновая функция $\Psi(x, y, z)$ зависит только от пространственных координат и удовлетворяет уравнению Шрёдингера для стационарных состояний

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0}\Delta\Psi + U\Psi = E\Psi \quad (3.26)$$

или в другой форме записи

$$\Delta\Psi + \frac{2m_0}{\hbar^2}(E - U)\Psi = 0 \quad (3.27)$$

Конкретный вид силового поля в стационарной задаче квантовой механики определяется заданием потенциальной энергии частицы $U(x, y, z)$. В этих задачах плотность вероятности обнаружения частицы (но не сама волновая функция Ψ) не зависит явно от времени:

$$w = \frac{dP}{dV} = |\Psi(x, y, z, t)|^2 = |\Psi(x, y, z)|^2.$$

Рассмотрим некоторые примеры задач о стационарных состояниях в квантовой механике.

Частица в одномерной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. В этой одномерной задаче потенциальная энергия частицы

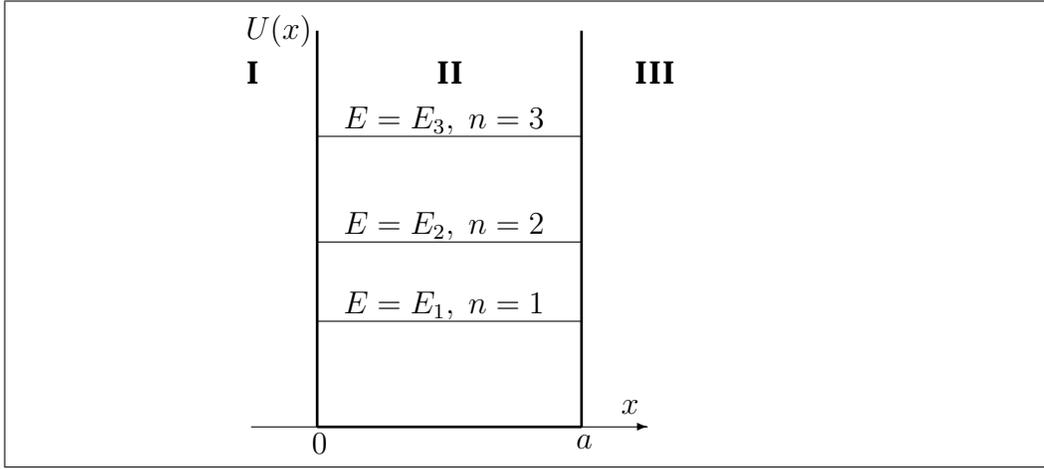


Рис. 3. 3.1

имеет вид (рис. 3)

$$U(x) = \begin{cases} \infty, & \text{при } x < 0 & \text{— область I,} \\ 0, & \text{при } 0 < x < a & \text{— область II,} \\ \infty, & \text{при } x > a & \text{— область III.} \end{cases}$$

В областях I и III $\Psi = 0$, так как из-за бесконечной высоты стенок ямы частица не может там оказаться, т.е. плотность вероятности $w = |\Psi|^2$ в областях I и III должна быть равна нулю. В области возможного движения частицы II решение уравнения Шрёдингера для стационарных состояний (??) с учётом условий непрерывности и нормировки волновой функции выглядит так:

$$\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.28)$$

Каждому квантовому состоянию, описываемому волновой функцией $\Psi_n(x)$ соответствует определённое значение полной энергии частицы (квантование энергии)

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_0 a^2} n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.29)$$

Таким образом, квантовое состояние частицы, движущейся в одномерной потенциальной яме, характеризуется одним квантовым числом n .

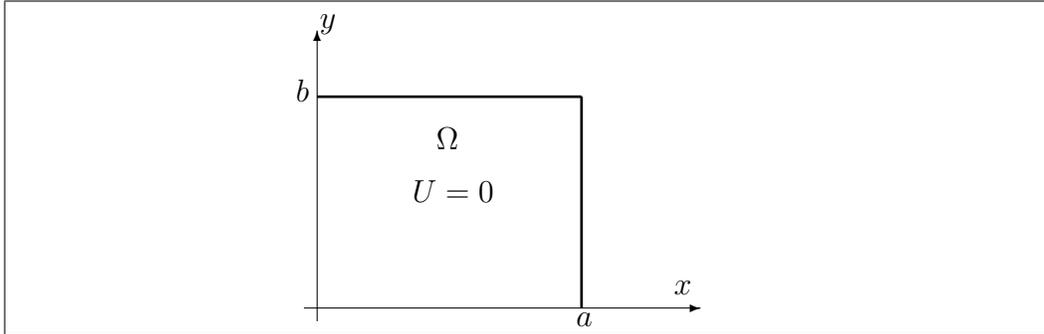


Рис. 4. 3.2

Частица в двумерной потенциальной яме с непроницаемыми стенками. В такой задаче

$$U(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) \in \Omega, \\ \infty, & (x, y) \notin \Omega, \end{cases}$$

где $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < a, 0 < y < b\}$ — прямоугольная область движения частицы на плоскости (рис. 4).

Квантовое состояние частицы в такой двумерной задаче задается двумя квантовыми числами n_1 и n_2 , а соответствующая волновая функция имеет вид

$$\Psi_{n_1, n_2}(x, y) = \sqrt{\frac{4}{ab}} \sin \frac{n_1 \pi x}{a} \sin \frac{n_2 \pi y}{b}, \quad n_1, n_2 = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.30)$$

т.е. является произведением двух волновых функций для одномерных ям. Отметим, что на границе области Ω , т.е. на непроницаемых для частицы стенках ямы волновая функция обращается в нуль.

Полная энергия частицы в любом квантовом состоянии определяется выражением

$$E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_0} \left[\left(\frac{n_1}{a} \right)^2 + \left(\frac{n_2}{b} \right)^2 \right], \quad n_1, n_2 = 1, 2, 3, \dots. \quad (3.31)$$

Частица в потенциальном ящике (трёхмерной потенциальной яме) с непроницаемыми стенками. Обозначим через $G = \{(x, y, z) : 0 <$

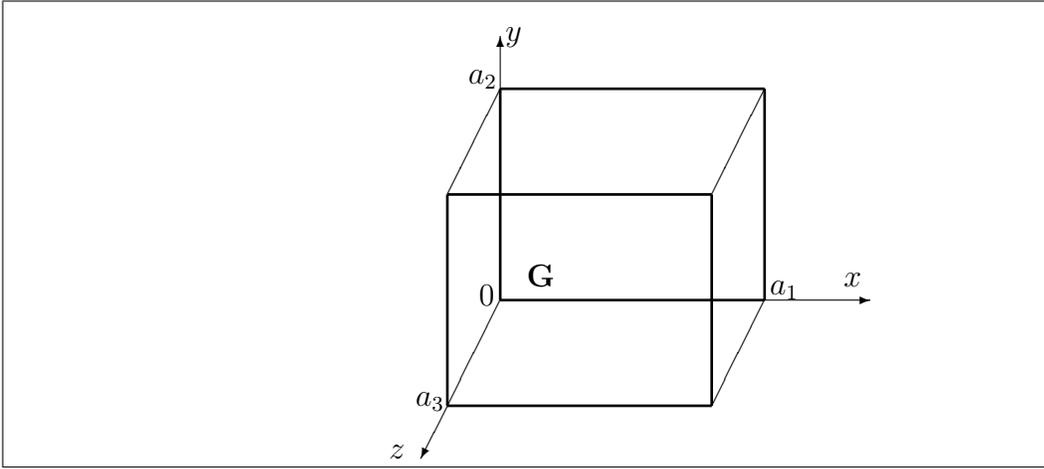


Рис. 5. 3.3

$x < a_1, 0 < y < a_2, 0 < z < a_3$ внутреннюю область прямоугольного параллелепипеда (рис. 5). В рассматриваемой задаче потенциальная энергия частицы в точке $M(x, y, z)$ пространства имеет вид

$$U(M) = \begin{cases} 0, & (x, y) \in G, \\ \infty, & (x, y) \notin G, \end{cases}$$

Вне потенциального ящика волновая функция равна нулю. Внутри потенциального ящика ($M \in G$) волновая функция может быть найдена как решение уравнения Шрёдингера для стационарных состояний (??)

$$\Psi_{n_1, n_2, n_3}(x, y, z) = \sqrt{\frac{8}{a_1 a_2 a_3}} \sin \frac{n_1 \pi x}{a_1} \sin \frac{n_2 \pi y}{a_2} \sin \frac{n_3 \pi z}{a_3}, \quad (3.32)$$

где $n_1, n_2, n_3 = 1, 2, 3, \dots$,

т. е. представляет собой произведение трёх одномерных волновых функций.

Квантовые состояния частицы, находящейся в потенциальном ящике, определяются тремя квантовыми числами n_1 , n_2 и n_3 . Каждому квантовому состоянию соответствует определённое значение полной энергии частицы

$$E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_0} \left[\left(\frac{n_1}{a_1} \right)^2 + \left(\frac{n_2}{a_2} \right)^2 + \left(\frac{n_3}{a_3} \right)^2 \right], \quad n_1, n_2, n_3 = 1, 2, 3, \dots \quad (3.33)$$

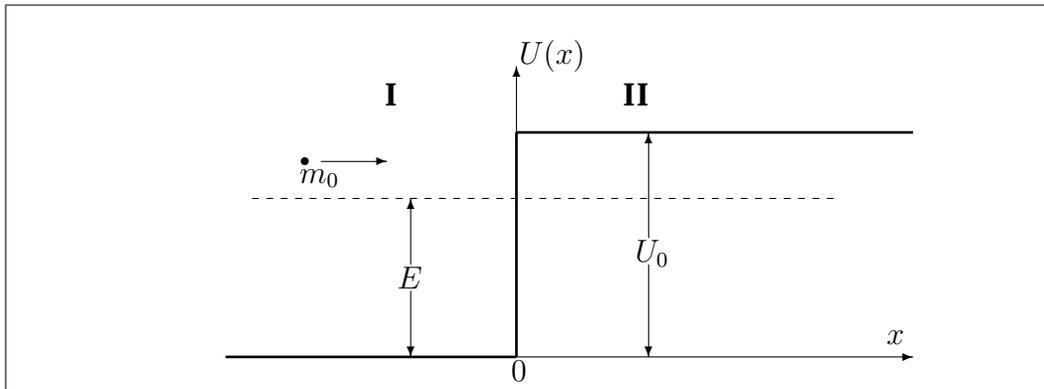


Рис. 6. 3.4

Только при этих значениях полной энергии E уравнение Шрёдингера имеет регулярные решения.

Отметим, что для потенциального ящика кубической формы, т.е. при $a_1 = a_2 = a_3 = a$, задача о движении частицы обладает пространственной симметрией за счёт равноправия всех трех пространственных направлений. В этом случае существуют квантовые состояния (например, Ψ_{112} , Ψ_{121} , Ψ_{211}), находясь в которых частица имеет одинаковые значения полной энергии. Совокупность таких состояний, в которых частица имеет одинаковые значения полной энергии E , называют вырожденными состояниями. При этом число состояний с одинаковым значением полной энергии частицы называют кратностью, или степенью вырождения этих состояний.

Прохождение частицы через потенциальный порог или барьер.

Пусть частица массой m_0 , имеющая полную энергию E , налетает на потенциальный порог (рис. 6), двигаясь, для определённости, слева направо. Потенциальная энергия частицы в такой задаче имеет вид ступенчатой функции

$$U(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0 \text{ — область I,} \\ U_0, & \text{при } x > 0 \text{ — область II.} \end{cases}$$

Решения уравнения Шрёдингера (??) для стационарных состояний, удовлетворяющие условиям непрерывности волновой функции и её про-

изводной в точке $x = 0$, выглядят так:

$$\Psi_1(x) = e^{ik_1x} + \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} e^{-ik_1x}; \quad (3.34)$$

$$\Psi_2(x) = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} e^{ik_1x}, \quad (3.35)$$

где $\Psi_1(x)$ — волновая функция частицы в области I; $\Psi_2(x)$ — волновая функция в области II; $k_1 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m_0 E}$; $k_2 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m_0 (U_0 - E)}$.

Вероятность того, что частица отразится от потенциального порога, определяется коэффициентом отражения

$$R = \left| \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right|^2. \quad (3.36)$$

Вероятность прохождения частицы через потенциальный порог характеризуется при этом коэффициентом прохождения $D = 1 - R$.

При квантовомеханическом рассмотрении задачи о прохождении частицы через потенциальный порог конечной толщины — потенциальный барьер (рис. 7), для которого

$$U(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0, \\ U_0, & \text{при } 0 < x < d, \\ 0, & \text{при } x > d. \end{cases}$$

можно показать, что существует отличная от нуля вероятность того, что частица преодолет даже высокий потенциальный барьер, высота которого U_0 больше полной энергии налетающей частицы E . Такое прохождение частицы через потенциальный барьер в случае $E < U_0$ называют *туннельным эффектом*.

Вероятность преодоления частицей высокого потенциального барьера характеризуется коэффициентом прохождения (коэффициентом прозрачности) D , который определяется выражением

$$D = D_0 e^{-\frac{2d}{\hbar} \sqrt{2m_0 (U_0 - E)}}, \quad D_0 \simeq 1. \quad (3.37)$$

В случае потенциального барьера произвольной формы (рис. 8) коэффициент прозрачности находят по формуле

$$D = D_0 e^{-\frac{2}{\hbar} \int_a^b \sqrt{2m_0 (U(x) - E)} dx}. \quad (3.38)$$

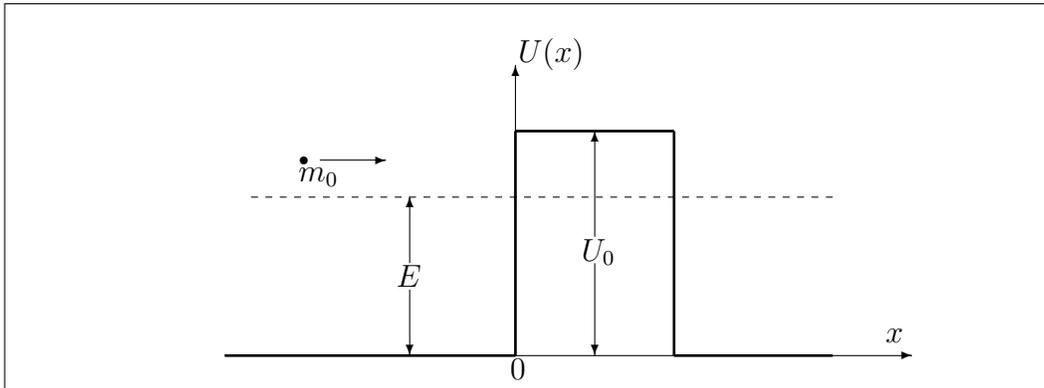


Рис. 7. 3.5

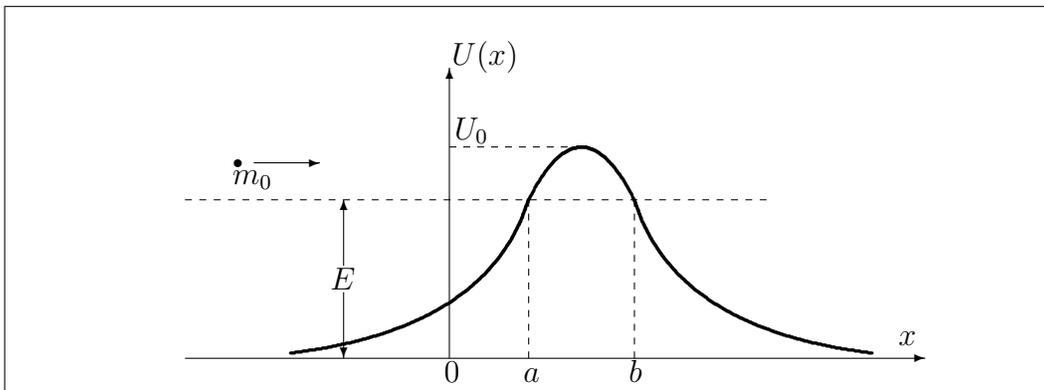


Рис. 8. 3.6

Интегрирование в (3.38) проводится по области, где $E < U$ (см. рис. 8).

Туннельный эффект позволяет объяснить такие физические явления, как α -распад ядер, холодную или автоэлектронную эмиссию электронов с поверхности металлов и ряд других физических явлений.

3.1 Примеры решения задач

☞ **Задача.** Задача 3.1. Электрон находится в потенциальной яме шириной $a = 5 \cdot 10^{-10}$ м с бесконечно высокими стенками. Найти минимально возможное значение энергии электрона в квантовом состоянии, для которого плотность вероятности обнаружения электрона в центре ямы равна нулю.

☞ **Решение.** Стационарные волновые функции, описывающие квантовые состояния электрона в потенциальной яме, определяются выражением (3.28). Исходя из статистического смысла волновой функции для плотности вероятности обнаружения электрона в различных точках ямы, получим

$$w(x) = \frac{dP}{dx} = |\Psi_n(x)|^2 = \frac{2}{a} \sin^2 \frac{\pi n x}{a}, \quad 0 \leq x \leq a$$

По условию задачи эта плотность вероятности обнаружения частицы в точке $x = \frac{a}{2}$ равна нулю. Это приводит к соотношению $\sin \frac{\pi n}{2} = 0$. Из этого соотношения следует, что существует множество квантовых состояний, в которых вероятность обнаружить электрон в центре ямы равна нулю. Эти состояния соответствуют значениям квантового числа $n = 2, 4, 6, \dots$. Но так как полная энергия электрона, движущегося в потенциальной яме, определяется выражением

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_0 a^2} n^2,$$

то минимальное значение полной энергии соответствует минимальному значению квантового числа n , т.е. для найденных состояний $n = 2$. Поэтому

$$E_{min} = E_2 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_0 a^2} = \frac{2 \cdot (3.14)^2 \cdot (1.05 \cdot 10^{-34})^2}{9.1 \cdot 10^{-31} \cdot (5 \cdot 10^{-10})^2} \simeq 9,5 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}.$$

☞ **Задача.** Задача 3.2. Частица в одномерной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками шириной a находится в низшем (первом) возбужденном состоянии. Определите вероятность обнаружения частицы в интервале $\frac{1}{4}a$, равноудалённом от стенок ямы.

☞ **Решение.** Квантовое состояние частицы с минимально возможным значением энергии называется основным, или невозбужденным состоянием. Такому состоянию при движении частицы в яме соответствует значение квантового числа $n = 1$. Остальные состояния называются возбуждёнными. Низшее возбуждённое состояние соответствует значению $n = 2$. Это квантовое состояние описывается волновой функцией

$$\Psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{2\pi x}{a}, \quad 0 \leq x \leq a.$$

Согласно вероятностному смыслу волновой функции, вероятность обнаружения частицы в интервале $x_1 < x < x_2$ определяется выражением

$$P = \int_{x_1}^{x_2} |\Psi(x)|^2 dx.$$

В нашей задаче $x_1 = \frac{3}{8}a$, а $x_2 = \frac{5}{8}a$. Поэтому искомая вероятность есть

$$P = \frac{2}{a} \int_{\frac{3}{8}a}^{\frac{5}{8}a} \sin^2 \frac{2\pi x}{a} dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} \simeq 0.09.$$

☞ **Задача.** 3.3 При каком отношении высоты потенциального порога U_0 к энергии налетающей частицы E коэффициент отражения $R = 0.5$?

☞ **Решение.** Из выражения (3.36) для коэффициента отражения следует, что при $E < U_0$, когда параметр $k_2 = ik$ является чисто мнимой величиной, а $|k_1 - ik| = |k_1 + ik|$, частица всегда отражается от высокого потенциального порога, так как для этого случая $R = 1$. Если же по условию задачи $R < 1$, то, следовательно, потенциальный порог в данной задаче является низким и $E > U_0$. Обозначив через $\varepsilon < 1$ искомое отношение $\frac{U_0}{E}$, запишем выражение для коэффициента отражения в виде

$$R = \left| \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right|^2 = \left| \frac{\sqrt{E} - \sqrt{E - U_0}}{\sqrt{E} + \sqrt{E - U_0}} \right|^2 = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \varepsilon}}{1 + \sqrt{1 - \varepsilon}} \right)^2.$$

Разрешая это соотношение относительно ε , находим

$$\varepsilon = 1 - \left(\frac{1 - \sqrt{R}}{1 + \sqrt{R}} \right)^2 .$$

Для $R = 0,5$ получаем

$$\varepsilon = \frac{U_0}{E} = 1 - \left(\frac{1 - \sqrt{0,5}}{1 + \sqrt{0,5}} \right)^2 \simeq 0,97 .$$

Следует отметить, что в классической, механике коэффициент отражения частицы от низкого потенциального порога всегда равен нулю. Другими словами, классическая частица всегда преодолевает потенциальный порог, высота которого меньше полной энергии налетающей частицы. Квантовая частица, т.е. частица, обладающая волновыми свойствами, имеет определённую вероятность отразиться от низкого потенциального порога.

4 Измерение физических величин в квантовомеханических системах

Квантовая механика принципиально отличается от классической в подходе к вопросу о результатах измерения физических величин. В квантовой механике физическая величина может иметь дискретный спектр значений (например, энергия атома водорода), тогда как в классической механике физические величины изменяются непрерывно. Кроме того, результаты измерений в квантовой механике имеют вероятностный характер — в процессе измерения с определённой вероятностью реализуется одно из нескольких значений физической величины. В классической механике вероятностный подход к результатам измерения отсутствует. Указанные различия требуют для квантовой механики адекватного математического описания. Такое описание осуществляется с помощью операторов.

В квантовой механике физическая величина характеризуется не своим численным значением, а линейным эрмитовым оператором, которым эта величина представляется. Линейность операторов необходима для выполнения принципа суперпозиции, а эрмитовость — для того, чтобы значение физической величины, получаемое в результате измерения,

было действительным. Каждой физической величине (координате, импульсу, моменту импульса и т.д.) ставится в соответствие свой оператор (оператор координаты, оператор импульса, оператор момента импульса и т.д.).

Приведём выражения для операторов основных физических величин.

- Операторы координаты:

$$\hat{y} = y; \quad \hat{z} = z. \quad (4.39)$$

- Операторы проекции импульса:

$$\hat{p}_x = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}; \quad \hat{p}_y = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y}; \quad \hat{p}_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (4.40)$$

- Операторы проекции момента импульса:

$$\hat{L}_x = \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y; \quad \hat{L}_y = \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z; \quad \hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x. \quad (4.41)$$

Отметим, что в сферических координатах вид оператора \hat{L}_z заметно упрощается:

$$\hat{L}_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad (4.42)$$

где φ — азимутальный угол.

- Оператор полной энергии (гамильтониан):

$$\hat{H} = \hat{E}_K + \hat{U},$$

где \hat{E}_K — оператор кинетической, а U — оператор потенциальной энергии.

Оператор кинетической энергии \hat{E}_K имеет вид:

$$\begin{aligned} \hat{E}_K &= \frac{\hat{p}^2}{2m_0} = \frac{1}{2m_0} (\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2) = \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m_0} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Оператор потенциальной энергии

$$\hat{U} = U(x, y, z).$$

Таким образом, гамильтониан можно найти, используя выражение

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\Delta + U(x, y, z). \quad (4.44)$$

Подчеркнём, что соотношения, которые классическая физика устанавливает для связи между значениями физических величин, в квантовой механике определяют связь между операторами этих величин.

Один из основных постулатов квантовой механики утверждает, что единственными возможными результатами измерения физической величины f , которой соответствует оператор \hat{F} , являются собственные значения этого оператора, т.е. собственные значения λ_n уравнения

$$\hat{F}u_n = \lambda_n u_n. \quad (4.45)$$

Здесь $u_n = u_n(x, y, z)$ — собственные функции оператора \hat{F} . Система собственных функций $\{u_n\}$ представляет собой, как правило, полную ортонормированную систему функций. Следовательно, волновую функцию Ψ , которая описывает какое-либо состояние физической системы, можно разложить в ряд по собственным функциям U_n

$$\Psi = \sum_n C_n u_n, \quad C_n = \int_V u_n^* \Psi dV. \quad (4.46)$$

В (4.46) интегрирование ведётся по всей области изменения пространственных переменных.

Вероятность того, что при измерении физической величины f будет получено численное значение λ_n ,

$$P(\lambda_n) = |C_n|^2. \quad (4.47)$$

Среднее значение физической величины f , которой соответствует оператор \hat{F} , в состоянии, описываемом нормированной волновой функцией Ψ , есть

$$\langle f \rangle = \int_V \Psi^* \hat{F} \Psi dV. \quad (4.48)$$

Важным в квантовой механике является вопрос об одновременном измерении (одновременном точном определении) двух физических величин. Необходимым и достаточным условием возможности одновременного измерения двух физических величин f и g является коммутативность

соответствующих им операторов \hat{F} и \hat{G} , т.е. выполнение равенства

$$[\hat{F}, \hat{G}] \equiv \hat{F}\hat{G} - \hat{G}\hat{F} = 0. \quad (4.49)$$

Оператор $[\hat{F}, \hat{G}]$ называется коммутатором операторов \hat{F} и \hat{G} .

4.1 Примеры решения задач

☞ **Задача .4.1.** Частица массой m_0 находится в одномерной бесконечно глубокой прямоугольной потенциальной яме шириной a в первом возбуждённом состоянии. Найдите среднее значение проекции импульса частицы $\langle p_x \rangle$ и квадрата импульса $\langle p^2 \rangle$.

☞ **Решение .** Волновая функция частицы в одномерной бесконечно глубокой прямоугольной потенциальной яме имеет вид /см. (refeq3.3)/

$$\Psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{2\pi x}{a},$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$. Первому возбуждённому состоянию частицы соответствует значение $n = 2$. Решим сначала задачу в общем случае для произвольного значения квантового числа n , а потом в полученное решение подставим значение $n = 2$.

Согласно (4.48) среднее значение проекции импульса

$$\begin{aligned} \langle p_x \rangle &= \int_0^a \Psi_n^*(x) \hat{p}^2 \Psi_n(x) dx = \\ &= \frac{\hbar}{i} \cdot \frac{2}{a} \int_0^a \sin \frac{\pi n x}{a} \frac{\partial}{\partial x} \left(\sin \frac{\pi n x}{a} \right) dx = \frac{\hbar}{ia} \sin^2 \frac{\pi n x}{a} \Big|_0^a = 0 \end{aligned} \quad (4.50)$$

Таким образом, $\langle p_x \rangle = 0$. Существенно, что ответ не зависит от n , т.е. от уровня, на котором находится частица в потенциальной яме. Более того, можно показать, что результат, полученный здесь для конкретного вида потенциальной ямы, оказывается справедливым и для более общего случая: среднее значение проекции импульса частицы, которая в стационарном состоянии имеет дискретный энергетический спектр, равно нулю.

Интересно отметить, что значение $\langle p_x \rangle = 0$ для частицы в яме получается и в классической механике. Для классической частицы этот

результат очевиден, так как частица движется вдоль одной оси, отражаясь от стенок ямы, а её импульс направлен то в одну, то в другую, противоположную первоначальной сторону. Поэтому среднее значение $\langle p_x \rangle$ равно нулю.

Вычислим теперь среднее значение квадрата импульса $\langle p^2 \rangle$. Поскольку мы имеем дело с одномерным случаем, то

$$\langle p^2 \rangle = \langle p_x^2 \rangle = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

В соответствии с (4.48) для $\langle p^2 \rangle$ находим

$$\begin{aligned} \langle p^2 \rangle &= \int_0^a \Psi_n^*(x) \hat{p}^2 \Psi_n(x) dx = -\hbar^2 \frac{2}{a} \int_0^a \sin \frac{\pi n x}{a} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\pi n x}{a} \right) dx = \\ &= \left(-\frac{2\hbar^2}{a} \right) \left(-\frac{\pi^2 n^2}{a^2} \right) \int_0^a \sin^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} x = \frac{2\hbar^2}{a} \cdot \frac{\pi n^2}{a^2} \cdot \frac{a}{2}. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Таким образом, $\langle p^2 \rangle = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{a^2}$. Подставляя значение $n = 2$, получаем окончательный ответ

$$\langle p^2 \rangle_{n=2} = \frac{4\pi^2 \hbar^2}{a^2}.$$

Отметим, что хотя среднее значение проекции импульса $\langle p_x \rangle$ равно нулю, среднее значение квадрата импульса $\langle p^2 \rangle$ отлично от нуля.

☞ **Задача 4.2.** Определите возможные результаты измерения проекции момента импульса L_z и их вероятности для частицы, находящейся в состоянии, описываемом волновой функцией $\Psi(\varphi) = A \cos^2 \varphi$, где φ — азимутальный угол.

☞ **Решение.** Прежде всего найдём нормировочную константу A . Из условия нормировки следует, что

$$\int_0^{2\pi} \Psi^*(\varphi) \Psi(\varphi) d\varphi = A^2 \int_0^{2\pi} \cos^4 \varphi d\varphi.$$

Поскольку $\int_0^{2\pi} \cos^4 \varphi d\varphi = \frac{3\pi}{4}$, то для A получаем следующее значение: $A = \frac{2}{\sqrt{3\pi}}$. Таким образом,

$$\Psi(\varphi) = \frac{2}{\sqrt{3\pi}} \cos^2 \varphi.$$

Оператор проекции момента импульса \hat{L}_z в сферических координатах имеет вид

$$\hat{L}_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi},$$

а его нормированные собственные функции и собственные значения определяются выражениями [1]

$$u_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}, \quad L_z = m\hbar,$$

где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Разложим волновую функцию $\Psi(\varphi)$ по собственным функциям оператора \hat{L}_z :

$$\Psi(\varphi) = \frac{2}{\sqrt{3\pi}} \cos^2 \varphi = \frac{2}{\sqrt{3\pi}} \cdot \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} = \frac{1 + \cos 2\varphi}{\sqrt{3\pi}}.$$

В соответствии с формулой Эйлера

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha,$$

представим $\cos 2\varphi$ следующим образом: $\cos 2\varphi = \frac{1}{2} (e^{i2\varphi} + e^{-i2\varphi})$. При этом разложение волновой функции $\Psi(\varphi)$ принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \Psi(\varphi) &= \frac{1}{\sqrt{3\pi}} \left(1 + \frac{1}{2} e^{i2\varphi} + \frac{1}{2} e^{-i2\varphi} \right) = \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i \cdot 0 \cdot \varphi} + \sqrt{\frac{1}{6}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i \cdot 2 \cdot \varphi} + \sqrt{\frac{1}{6}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i \cdot 2 \cdot \varphi} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}} u_0(\varphi) + \sqrt{\frac{1}{6}} u_{+2}(\varphi) + \sqrt{\frac{1}{6}} u_{-2}(\varphi). \end{aligned} \quad (4.52)$$

Поскольку в разложении (4.52) присутствуют только собственные функции оператора \hat{L}_z , отвечающие значением $m = 0$ и $m = 2$, то это означает, что из всего спектра собственных значений оператора \hat{L}_z для частицы, находящейся в данном состоянии, реализуются

$$L_z = 0, \quad L_z = 2\hbar, \quad L_z = -2\hbar.$$

Именно эти значения и будут найдены в результате измерений. Вероятность получить при измерении какое-либо одно из них определяется, согласно (??), квадратом модуля коэффициента разложения волновой

функции $\Psi(\varphi)$ по соответствующей собственной функции $u_m(\varphi)$. Как следует из (4.52),

$$P(0) = \frac{2}{3}, \quad P(2\hbar) = \frac{1}{6}, \quad P(-2\hbar) = \frac{1}{6}.$$

5 Задачи домашнего задания

Студент решает задачи, номера которых определяются из таблицы вариантов, предлагаемой кафедрой физики.

1. Вычислите длину волны де Бройля молекул водорода, соответствующую средней скорости их теплового движения. Газ имеет комнатную температуру $T = 300$ К.
2. Вычислите длину волны де Бройля молекул водорода, соответствующую их наиболее вероятной скорости при температуре $T = 273$ К.
3. Рассчитайте наиболее вероятную длину волны де Бройля молекул кислорода, находящегося в термодинамическом равновесии при температуре $T = 273$ К.
4. Электрон движется по окружности радиусом $R = 0,5$ см в однородном магнитном поле с индукцией $B = 8 \cdot 10^{-3}$ Тл. Определите длину волны де Бройля такого электрона.
5. Две одинаковые нерелятивистские частицы движутся перпендикулярно друг другу, имея длины волн де Бройля λ_1 и λ_2 . Найдите длины волн де Бройля каждой частицы в системе их центра масс.
6. Нерелятивистская частица массой m_1 с кинетической энергией E_1 испытывает упругое лобовое соударение с покоящейся частицей массой m_2 . Найдите дебройлевские длины волн частиц после соударения в системе отсчёта, связанной с центром масс этих частиц.
7. Вычислите длину волны де Бройля электрона, движущегося в атоме водорода на n -й стационарной орбите.
8. Параллельный пучок электронов с кинетической энергией $E_K = 25$ эВ испытывает дифракцию на плоской щели шириной $b = 5$ мкм. Оцените ширину центрального дифракционного максимума на экране, расположенном на расстоянии $l = 1$ м от щели.

9. Узкий пучок моноэнергетических нерелятивистских электронов падает нормально на поверхность монокристалла. В направлении, составляющем угол $\alpha = 55^\circ$ с нормалью к поверхности, наблюдается максимум отражения электронов второго порядка. Определите скорость падающих электронов, если расстояние между отражающими атомными плоскостями кристалла $d = 0,2$ нм.
10. Узкий пучок моноэнергетических нерелятивистских электронов испытывает при падении на монокристалл интенсивное отражение четвёртого порядка. Расстояние между отражающими атомными плоскостями $d = 0,21$ нм. Определите кинетическую энергию падающих электронов, если угол между падающим и отражённым электронными пучками $\alpha = 90^\circ$.
11. Моноэнергетический пучок нерелятивистских электронов зеркально отражается от поверхности монокристалла, испытывая брэгговское отражение. На сколько отличаются скорости электронов для двух последующих порядков отражения? Пучок электронов падает под углом скольжения $\theta = 30^\circ$. Расстояние между соседними кристаллическими плоскостями $d = 1,65 \cdot 10^{-10}$ м.
12. Пучок электронов с кинетической энергией $E_K = 15$ кэВ проходит через тонкую поликристаллическую золотую фольгу, а затем попадает на фотопластинку. Области почернения на пластинке имеют форму концентрических колец с центрами на оси пучка. Рассчитайте диаметр первого кольца, если расстояние от фольги до пластинки $L = 10$ см. Расстояние между соседними атомными плоскостями для решетки золота $d = 2,9 \cdot 10^{-10}$ м.
13. Поток нейтронов проходит через узкие радиальные щели в двух дисках из кадмия, поглощающего нейтроны. Диски насажены на общую ось так, что щели повернуты друг относительно друга на угол $\alpha = 4^\circ$. Диски вращаются с угловой скоростью $\omega = 300$ рад/с. Определите длину волны де Бройля нейтронов, пропускаемых таким устройством, если расстояние между дисками $L = 1$ м.
14. Оцените с помощью соотношения неопределённостей Гейзенберга неопределённость скорости электрона в атоме водорода, полагая размер атома $l = 10^{-10}$ м. Сравните полученную величину со скоростью электрона на первой Боровской орбите.

15. Электрон с кинетической энергией $E_K = 4 \text{ эВ}$ движется в области пространства размером $a = 10^{-10} \text{ м}$. Оцените относительную неопределённость скорости электрона.
16. Используя соотношение неопределённостей, оцените минимальную энергию частицы массой m_0 , движущейся в одномерной потенциальной яме шириной a .
17. Оцените относительную ширину $\frac{\Delta\omega}{\omega}$ спектральной линии, соответствующую длине волны $\lambda = 0,6 \text{ мкм}$, если известно время жизни атома в возбуждённом состоянии $\tau = 10^{-8} \text{ с}$.
18. Типичное время жизни возбуждённого ядра имеет порядок $\tau \approx 10^{-12} \text{ с}$. Найдите неопределённость энергии (в мегаэлектронвольтах) испускаемых ядрами γ -квантов.
19. С помощью соотношения неопределённостей оцените угловую ширину центрального дифракционного максимума на экране после прохождения пучка электронов с энергией $E_K = 20 \text{ эВ}$ через щель шириной $b = 0,6 \text{ мкм}$.
20. Частица находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками, имеющей ширину a . В каких точках интервала $0 < x < a$ плотность вероятности обнаружения частицы одинакова для основного и первого возбуждённого состояний?
21. Частица находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками во втором возбуждённом состоянии. Ширина ямы равна a . В каких точках интервала $0 < x < a$ плотность вероятности обнаружения частицы имеет максимальное и минимальное значения?
22. Частица находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Найдите отношение вероятностей нахождения частицы в средней трети ямы для первого и второго возбуждённых состояний.
23. Частица массой m_0 находится в двумерной квадратной потенциальной яме с непроницаемыми стенками. Какова энергия частицы

в основном состоянии, если максимальное значение плотности вероятности обнаружения частицы равно w_m ?

24. Частица массой m_0 находится в двумерной квадратной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Сторона ямы равна a . Найдите разность энергий частицы на 3-м и 4-м уровнях ΔE_{34} , а также кратность вырождения этих уровней K_3 и K_4 .
25. Частица массой m_0 находится в двумерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Координаты x , y частицы лежат в пределах $0 < x < a$, $0 < y < b$, где a и b — стороны ямы. Определите вероятность нахождения частицы с наименьшей энергией в области:
- а) $0 < x < \frac{a}{3}$;
 - б) $0 < y < \frac{b}{3}$;
 - в) $0 < x < \frac{a}{3}$, $0 < y < \frac{b}{3}$.
26. Частица массой m_0 находится в двумерной квадратной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками во втором возбуждённом состоянии. Сторона ямы равна a . Определите вероятность нахождения частицы в области:
- а) $\frac{a}{4} < x < \frac{3a}{4}$;
 - б) $\frac{a}{4} < y < \frac{3a}{4}$;
 - в) $\frac{a}{4} < x < \frac{3a}{4}$, $\frac{a}{4} < y < \frac{3a}{4}$.
27. Частица массой m_0 находится в кубической потенциальной яме с абсолютно непроницаемыми стенками. Длина ребра куба равна a . Найдите разность энергий частицы на 5-м и 6-м уровнях ΔE_{56} и кратность вырождения этих уровней K_5 и K_6 .
28. Частица массой m_0 находится в кубической потенциальной яме с абсолютно непроницаемыми стенками. Найдите длину ребра куба, если разность энергий 3-го и 4-го уровней равна ΔE .
29. Квантовый гармонический осциллятор находится в основном состоянии. Найдите вероятность P обнаружения частицы в области $-A < x < A$, где A — амплитуда классических колебаний.

30. Частица с энергией E падает на прямоугольный потенциальный порог высотой U_0 . Покажите, что при $E < U_0$ коэффициент отражения частицы от порога R равен единице.
31. Частица массой m_0 , обладающая энергией E , падает на прямоугольный потенциальный порог высотой $U_0 < E$. Найдите коэффициент отражения R и коэффициент прохождения D этого порога. Убедитесь, что $R + D = 1$.
32. Частица с энергией E падает на прямоугольный потенциальный порог высотой U_0 . Найдите приближённое выражение для коэффициента отражения R для случая $\frac{U_0}{E} \ll 1$.
33. Энергия налетающей на прямоугольный потенциальный порог частицы E в $\eta = 2$ раз превышает высоту порога U_0 . Найдите коэффициент отражения частицы от порога R и коэффициент прохождения частицы через порог D .
34. Коэффициент прохождения частиц через низкий потенциальный порог D равен коэффициенту отражения R . Найдите, во сколько раз энергия частиц E больше высоты потенциального порога U_0 .
35. Найдите коэффициент прохождения частицы массой m_0 через треугольный потенциальный барьер вида

$$U(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0, \\ U_0 \left(1 - \frac{x}{d}\right), & \text{при } 0 \leq x \leq d, \\ 0, & \text{при } x > d. \end{cases}$$

в зависимости от энергии частицы E при $E < U_0$.

36. Найдите коэффициент прохождения частицы массой m_0 через треугольный потенциальный барьер вида

$$U(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0, \\ U_0 \frac{x}{d}, & \text{при } 0 \leq x \leq d, \\ 0, & \text{при } x > d. \end{cases}$$

в зависимости от энергии частицы E при $E < U_0$.

37. Найдите коэффициент прохождения частицы массой m_0 через о потенциальный барьер вида

$$U(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0, \\ U_0 \left(1 - \frac{x^2}{d^2}\right), & \text{при } 0 \leq x \leq d, \\ 0, & \text{при } x > d. \end{cases}$$

в зависимости от энергии частицы E при $E < U_0$.

38. Частица массой m_0 падает на прямоугольный потенциальный барьер шириной d и высотой U_0 , причём энергия частицы $E > U_0$. Найдите коэффициент прохождения частицы через барьер D , а также значения энергии E , при которых частица будет беспрепятственно проходить через барьер.
39. Частица массой m_0 , обладающая энергией E , падает на прямоугольную потенциальную яму шириной a и глубиной U_0 . Найдите коэффициент прохождения ямы для этой частицы.
40. Частица массой m_0 падает на прямоугольную потенциальную яму шириной a и глубиной U_0 . При каких значениях энергии частицы E она будет беспрепятственно проходить через яму? Убедитесь, что это происходит при условии, что ширина ямы равна целому числу дебройлевских полуволен частицы внутри ямы.
41. В некоторый момент времени частица находится в состоянии, описываемом волновой функцией, координатная часть которой имеет вид

$$\Psi(x) = A e^{-\frac{x^2}{a^2} i k x},$$

где A и a — некоторые постоянные, а k — заданный параметр, имеющий размерность обратной длины. Найдите для данного состояния средние значения координаты $\langle x \rangle$ и проекции импульса частицы $\langle p_x \rangle$.

42. Частица массой m_0 находится в одномерной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками в первом возбуждённом состоянии. Найдите ширину ямы a , если среднее значение кинетической энергии частицы равно E_0 .

43. Частица находится в двумерной квадратной потенциальной яме с непроницаемыми стенками во втором возбуждённом состоянии. Найдите площадь ямы S , если среднее значение квадрата импульса частицы $\langle p^2 \rangle$ равно p_0^2 .
44. Определите возможные результаты измерения проекции момента импульса L_z , и их вероятности для частицы, находящейся в состоянии, описываемом волновой функцией $\Psi(\varphi) = A(1 + \sin \varphi)$, где φ — азимутальный угол, а A — некоторая постоянная.
45. Найдите средние значения кинетической и потенциальной энергий квантового осциллятора с частотой ω_0 в основном состоянии, описываемом волновой функцией $\Psi(x) = Ae^{-\frac{m_0\omega_0 x^2}{2\hbar}}$, где A — некоторая постоянная, а m_0 — масса осциллятора.
46. Докажите, что квадрат момента импульса частицы \vec{L}^2 может быть одновременно измерим с кинетической энергией частицы E_K .
Указание. Рассмотрите коммутатор операторов \hat{L}^2 и E_k^2 .
47. Частица массой m_0 находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме с абсолютно непроницаемыми стенками в состоянии, описываемом волновой функцией $\Psi(x) = Ax(a - x)$, где A — некоторая постоянная, а a — ширина ямы. Найдите среднее значение кинетической энергии частицы в этом состоянии.
48. В одномерной прямоугольной потенциальной яме с абсолютно непроницаемыми стенками находится частица в состоянии, описываемом волновой функцией $\Psi(x) = A \sin^2 \frac{\pi x}{a}$, где a — ширина ямы. Найдите вероятность её пребывания в основном состоянии.
49. Волновая функция частицы имеет вид $\Psi(r) = \frac{A}{r} e^{-\frac{r}{a}}$, где r — расстояние частицы от силового центра, а a — некоторая константа, имеющая размерность длины. Найдите значение коэффициента A и среднее расстояние $\langle r \rangle$ частицы от центра.

Список литературы

- [1] Врунов П.А., Мартинсон Л.К., Смирнов Е.В. Операторы в квантовой механике. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1994, 40 с.

-
- [2] *Мартинсон Л.К.* Методические указания к решению задач по курсу общей физики. Разделы «Элементы квантовой механики», «Физика твёрдого тела». М.: МВТУ им. Н.Э. Баумана, 1983. 64 с.
- [3] *Чертов А.Г., Воробьёв А.А.* Задачник по физике. М.: Высш. шк., 1988. 527 с.
- [4] *Иродов И.Е.* Задачи по общей физике. М.: ЗАО «Издательство БИНОМ», 1998. 448 с.
- [5] *Иродов И.Е.* Задачи по квантовой физике. М.: Высш. шк., 1991. 175 с.

Список иллюстраций

1	1.1	4
2	1.2	8
3	3.1	14
4	3.2	15
5	3.3	16
6	3.4	17
7	3.5	19
8	3.6	19

Содержание

1	Волновые свойства частиц.	
	Гипотеза де Бройля	3
1.1	Примеры решения задач	4
2	Соотношения неопределенностей Гейзенберга	8
2.1	Примеры решения задач	9
3	Задачи о стационарных состояниях в квантовой механике	13
3.1	Примеры решения задач	20
4	Измерение физических величин в квантовомеханических системах	22
4.1	Примеры решения задач	25
5	Задачи домашнего задания	28
	Литература	34
	Список иллюстраций	36
	Оглавление	36
	Об электронной версии	37

Электронная версия документа подготовлена с помощью издательской системы \LaTeX 2 ϵ .

PDF версия получена с помощью программы pdf \TeX версии 0.14-f.

Перечисленные программные продукты являются свободными и распространяются бесплатно. Они входят в состав проекта Mik \TeX . Официальный сайт проекта <http://miktex.org>

Гарнитура Антиква. Для поготовки документа использованы кириллические PostScript шрифты (Type I), входящие в состав пакета PSCyr 0.4